QED 5–10

Matematikk for grunnskolelærerutdanningen

Bind 2

Fasit kapittel 2 – Tallenes hemmeligheter

CAPPELEN DAMM AKADEMISK

Kapittel 2

Oppgave 5. Nei

Oppgave 7. Addisjon og multiplikasjon

Oppgave 8. **b)** Hvis vi ser på hele tall er $\{1\}, \{0,1\}, \{-1,0,1\}$ de mulige mengdene.

Oppgave 9. $0/0$ er udefinert, men hvis man pr definisjon utelukker dette, vil de rasjonale tallene $\mathbb{Q}$, de reelle tallene $\mathbb{R}$ og de komplekse tallene $\mathbb{C}$ være lukket under de fire regneartene.

Oppgave 12. **a)** $q = 4,\ r = 3$ **b)** $q = 18,\ r = 1$ **c)** $q = 7,\ r = 0$ **d)** $q = 7,\ r = 77$ **e)** $q = 0,\ r = 0$

Oppgave 15. **b)** $r = 5$ (siden vi krever positiv rest)

Oppgave 18. $-21, 0, 21$

Oppgave 19. $-24, -12, 0, 12, 24$

Oppgave 20. $-20, -5, -4, -1, 1, 1, 20$

Oppgave 21. Alle tall på formen $-20 \cdot n$ der n er et naturlig tall eller 0.

Oppgave 24. **a)** $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5, \quad 45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$ **b)** $-15, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 15$ **c)** -15 og 15 er største felles faktorer

Oppgave 25. $-24, -12, -8, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$

Oppgave 26. $a \cdot b = SFF(a,b) \cdot MFM(a,b)$

Oppgave 28. Hvis $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, så er $SFF(a,(SFF(b,c)) = SFF(SFF(a,b),c) = SFF(SFF(a,c),b)$

Oppgave 29. **a)** 8 **b)** -8 **c)** -8 **d)** -1

Oppgave 31. **a)** $a \neq 0, b \neq 0$ **b)** For a og b heltall ulik null.

Oppgave 32. $q = 1,\ r = 13$

Oppgave 34. 45045 (og -45045)

Oppgave 35. **a)** SFF: 21, MFM: 1890 **b)** SFF: 8, MFM: 138736
c) SFF: 19, MFM: 1062347 **d)** SFF: 53, MFM: 1178190
e) SFF: 98, MFM: 15931370 **f)** SFF: 143, MFM: 331486441
g) SFF: 21, MFM: 50540490 **h)** SFF: 2021, MFM: 1459176147
i) SFF: 1, MFM: 17514355008327

Oppgave 36.

a) Eksempler er $-8, 4, 16, 28$

b) Eksempler er $-5, 7, 19, 31$

c) Eksempler er $-12, 0, 12, 24$

d) Eksempler er $-11, 6, 23, 40$

e) Eksempler er $-1, 4, 9, 14$

f) Eksempler er $-7, 0, 7, 14$

g) Eksempler er $-7, -3, 1, 5$

Oppgave 37.

a) Eksempler er $-17, -5, 7, 19$

b) Eksempler er $-18, -6, 6, 18$

c) Eksempler er $-7, -3, 1, 5$

d) Eksempler er $-14, -3, 8, 19$

Oppgave 40.

a) Eksempler er $4, 16$

b) Eksempler er $0, 12$

c) Eksempler er $1, 5$

d) Eksempler er $8, 20$

e) Eksempler er $-2, 5, 12$

Oppgave 41. Restklassen til $9 \pmod{12}$

Oppgave 42. **a)** Restklassen til $2 \pmod 7$ **b)** Restklassen til $2 \pmod 7$ **c)** Legg merke til at $-5 \equiv 2 \pmod 7$ **d)** $r = 2$

Oppgave 43. Begge tabellene er symmetriske om diagonalen som går fra øverst til venstre til nederst til høyre. Dette kommer fra kommutativ lov. Tabell 4 har også en symmetri om diagonelen som går fra $1 \cdot 6$ til $6 \cdot 1$. Dette er fordi $a \cdot b = (-a) \cdot (-b) \equiv (7-a) \cdot (7-b) \pmod 7$.

Oppgave 44.

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
3	0	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9
4	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8
5	0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7
6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6
7	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
8	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4
9	0	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3
10	0	10	8	6	4	2	0	10	8	6	4	2
11	0	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Tabell 1: Multiplikasjonstabell modulo 12.

Ja, $2, 3, 4, 6, 8, 9, 10$ har ingen multiplikativ invers. Dette er tall som har en felles faktor med 12 som er større enn 1.

Oppgave 46. **a)** 4 **b)** 4 **c)** 16 **d)** 4 **e)** 3 **f)** 63

Oppgave 47. 8. Hint: $794 \cdot 31 \equiv 2 \cdot 4 \equiv 8 \pmod 9$

Oppgave 48. 3

Oppgave 51. **a)** 23 **b)** 12 **c)** 12

Oppgave 52. **a)** 71 **b)** 15 **c)** 15

Oppgave 53. **a)** 6 **b)** 1 **c)** 4 **d)** 6 **e)** 8

Oppgave 55. $a \equiv \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot 10^i \equiv \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot 1^i \equiv \sum_{i=0}^{m} a_i \equiv T(a) \pmod 9$

Oppgave 56.

$a \equiv \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot 10^i \equiv \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot 10^i + a_0 \equiv \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot 0^i + a_0 \equiv a_0 \pmod 5$

Oppgave 57. 12

Oppgave 58. 4

Oppgave 60. Indikerer galt svar

Oppgave 61. Kan med sikkerhet si at svaret er galt

Oppgave 64. **a)** Indikerer rett svar **b)** Indikerer rett svar **c)** Indikerer rett svar **d)** Indikerer rett svar

Oppgave 66. **a)** 2 streker, $x \equiv 2 \pmod{12}$ **c)** 5 streker. Har funnet ny løsning $x \equiv 5 \pmod{12}$ **e)** $x \equiv 2 \pmod{12}$, $x \equiv 5 \pmod{12}$, $x \equiv 8 \pmod{12}$, $x \equiv 11 \pmod{12}$ **f)** Når vi har kommet til $x > 12$.

Oppgave 67. **a)** Nei. Likningen har ingen løsning. **b)** 3 streker. Da kommer du tilbake til 0 uten å ha vært innom 1. **c)** Hvis $b \neq 0, 4, 8$ har likningen ingen løsning.

Oppgave 68. **a)** $x \equiv 9 \pmod{12}$ **b)** $x \equiv 2 \pmod{12}$, $x \equiv 5 \pmod{12}$, $x \equiv 8 \pmod{12}$, $x \equiv 11 \pmod{12}$ **c)** $x \equiv 100 \pmod{400}$

Oppgave 69. **a)** $x \equiv 0 \pmod{15}$, $x \equiv 3 \pmod{15}$, $x \equiv 6 \pmod{15}$, $x \equiv 9 \pmod{15}$, $x \equiv 12 \pmod{15}$ **b)** $x \equiv 1 \pmod{14}$, $x \equiv 3 \pmod{14}$, $x \equiv 5 \pmod{14}$, $x \equiv 7 \pmod{14}$, $x \equiv 9 \pmod{14}$, $x \equiv 11 \pmod{14}$, $x \equiv 13 \pmod{14}$ **c)** Ingen løsninger.

Oppgave 70. 200 meter

Oppgave 71. **a)** $8 \cdot 1 \equiv 8 \pmod{12}$, $8 \cdot 2 \equiv 4 \pmod{12}$, $8 \cdot 3 \equiv 0 \pmod{12}$, $8 \cdot 4 \equiv 8 \pmod{12}$, $8 \cdot 5 \equiv 4 \pmod{12}$, $8 \cdot 6 \equiv 0 \pmod{12}$, $8 \cdot 7 \equiv 8 \pmod{12}$, $8 \cdot 8 \equiv 4 \pmod{12}$, $8 \cdot 9 \equiv 0 \pmod{12}$, $8 \cdot 10 \equiv 8 \pmod{12}$, $8 \cdot 11 \equiv 4 \pmod{12}$
b) $x \equiv 2 \pmod{12}$, $x \equiv 5 \pmod{12}$, $x \equiv 8 \pmod{12}$, $x \equiv 11 \pmod{12}$
c) Intet multiplikasjonsstykke i tabellen gir 1.

Oppgave 72. $x \equiv 4 \pmod{7}$

Oppgave 73. **a)** $x \equiv 3 \pmod{5}$ **b)** $x \equiv 8 \pmod{9}$ **c)** $x \equiv 6 \pmod{8}$
d) $x \equiv 11 \pmod{13}$ **e)** $x \equiv 0 \pmod{15}$, $x \equiv 3 \pmod{15}$, $x \equiv 6 \pmod{15}$, $x \equiv 9 \pmod{15}$, $x \equiv 12 \pmod{15}$ **f)** $x \equiv 4 \pmod{7}$

Oppgave 74. **a)** $2, 3, 4, 6, 8, 9, 10$. Alle nulldivisorene har en felles faktor større enn 1 med 12. **b)** $1, 5, 7, 11$. Multiplikative inverser modulo 12 har 1 som største felles faktor med 12. **c)** Snitt: Den tomme mengde. Unionen: Alle tall mellom 0 og 12.

Oppgave 76. **a)** $2x \equiv 1 \pmod{5}$, $x \equiv 3 \pmod{5}$ **b)** $2x + 2 \equiv 3 \pmod{5}$, $x \equiv 3 \pmod{5}$ **c)** $11x \equiv 4 \pmod{13}$, $x \equiv 11 \pmod{13}$ **d)** $11x \equiv 4 \pmod{13}$, $x \equiv 11 \pmod{13}$

Oppgave 77. b) $x \equiv 2 \pmod 5$. Fyll opp 3-liters bøtta og hell den oppi 5-liters bøtta. Fyll opp 3-liters bøtta på nytt, og hell så mye som mulig opp i 5-liters bøtta. Når 5-liters bøtta er full, heller du den ut, og beholder det som var igjen i 3-liters bøtta. Dette er 1 liter. **c)** La a og b være liter som er plass til i de to bøttene. La c være mengde vann som skal måles opp. Hvis og bare hvis $SFF(a, b)|c$ kan den ønskede vannmengden måles opp.

Oppgave 78. 4 grupper med 4 elever og 3 grupper med 5 elever.

Oppgave 79. $x_t = 3 - 7t, \quad y_t = -2 + 5t$. Løsning ved $t = 0$: Fyll opp 5-liters bøtta en gang. Tøm den over i 7-liters bøtta. Fyll opp 5-liters bøtta en gang til. Hell over i 7-liters bøtta til den er full. Hell ut alt i 7-liters bøtta. Hell over resten fra 5-liters bøtta. Fyll opp 5-liters bøtta på nytt, og hell over i 7-liters bøtta til den er full. Tøm ut innholdet i 7-liters bøtta. Nå sitter du igjen med 1 liter vann i 5-liters bøtta. Du har altså fylt opp 5-liters bøtta 3 ganger og 7-liters bøtta -2 ganger (helt ut). Derfor er $x = 3$ og $y = 2$ et naturlig svar. Alternativt, sett $t = 1$. Da blir $x_1 = -4, \quad y_1 = 3$. Da fyller du opp 3 sjuliters bøtter og heller ut 4 femliters bøtter.

Oppgave 80. a) $3x + 1y = 11$.
Mulige løsninger: $x = 3, y = 2, \quad x = 2, y = 5, \quad x = 1, y = 8, \quad x = 0, y = 11$

Oppgave 81. 80

Oppgave 82. a) $SFF(10, 24) = 2$ **b)** $x_t = -4 + 5t, y_t = 10 - 12t$ der t er et helt tall. **d)** Ja, fordi $SFF(10, 24) = 2$ vil det finnes to heltallsløsninger for hver gang x øker med 10.

Oppgave 83. a) $x_t = 7 + 38t, y_t = -51 - 277t$ der t er et helt tall. Ingen positive løsninger. **b)** $x_t = 6 - 19t, y_t = 29 - 92t$ der t er et helt tall. Positive løsninger: Alle x_t, y_t der $t \leq 0$. **c)** $x_t = 7 - 117t, y_t = 78 - 1304t$ der t er et helt tall. Positive løsninger: Alle x_t, y_t der $t \leq 0$. **d)** $x_t = -11 + 78t, y_t = 210 - 1489t$ der t er et helt tall. Ingen positive løsninger. **e)** Ingen løsninger eksisterer.

Oppgave 84. a) $x \equiv 226 \pmod{277}$ **b)** $y \equiv 1226 \pmod{1304}$
c) $x \equiv 210 \pmod{5956}$, $x \equiv 1699 \pmod{5956}$, $x \equiv 3188 \pmod{5956}$, $x \equiv 4677 \pmod{5956}$

Oppgave 85. Hint: $-15x + 21y = 133 = 7 \cdot 19$. $SFF(15, 21) \nmid 7 \cdot 19$. Finnes ikke heltallskoordinater.

Oppgave 86. a) Krav: $d \cdot SFF(a, b)|bc$ samt $b \neq 0, d \neq 0$.

Oppgave 87. **a)** $SFF(a, b) = 1$. **b)** La $e = \min(a, b)$. Kravet er da at de diofantiske likningene $ax + by = d$ har en positiv løsning for alle d der $c \leq d < c + e$.
Oppgave 90. Eksempelvis $x = \frac{3}{5}$ og $y = \frac{4}{5}$.
Oppgave 92. 2
Oppgave 93. $1029 = 3^1 \cdot 7^3$
Oppgave 94. 121
Oppgave 95. $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, $99 = 3^2 \cdot 11$, $105 \cdot 99 = 10395$
Oppgave 96. Det er ofte lett å bryte koder med bokstavforskyvning
Oppgave 97. ymcqymcuww
Oppgave 102. **a)** Ja. Vi får henholdsvis 5 og 3 i rest. **b)** Ja, for dette fødselsnummeret. **c)** Ja. Vi får henholdsvis 8 og 9 i rest.
Oppgave 103. **a)** 5 **b)** 7
Oppgave 106. **a)** $n = 55$ **c)** $\phi(55) = 40$, $d = 27$
d) Offentlig nøkkel: $n = 55, e = 3$ Privat nøkkel: $n = 55, d = 27$
e) $12^3 \equiv 23 \pmod{55}$ **f)** $23^{27} \equiv 12 \pmod{55}$
Oppgave 107. **a)** $\phi(33) = 20$, $SFF(7, 20) = 1$ **b)** 3 er en multiplikativ invers for 7 når vi regner modulo 20 **c)** $15^7 \equiv 27 \pmod{33}$
d) $27^3 \equiv 15 \pmod{33}$
Oppgave 110. Forholdet går mot 0,61803398874989484820
Oppgave 111. **e)** $\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
Oppgave 116. Hint: $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $-\frac{1}{\phi} = -\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}+1} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$